Учреждение образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники» филиал «Минский радиотехнический колледж»

# Олимпиадные задания по математике для школьников

**1.** *Обратитесь к тексту «Колесо обозрения» справа.*
Дима и Марина считали людей, катающихся на колесе обозрения в Парке Горького.
За полный оборот колеса в проезжающих мимо кабинках они насчитали 8 закрытых кабинок по два человека, 16 закрытых кабинок по четыре человека и 4 закрытые кабинки по три человека в каждой. Все остальные закрытые кабинки были пустыми, а в каждой из открытых кабинок было по три человека в каждой.
Исходя из этих данных, оцените в процентах загруженность аттракциона в данный момент.
Полученный ответ округлите до единиц.

<u>Колесо обозрения</u>

Колесо обозрения в минском Парке Горького было установлено в 2003 году. Его высота составляет 54 метра.
Количество мест: 144.
Количество кабинок: 36.
Из них — 4 открытые и 32 закрытые кабинки.

**2.** Призеры предметных олимпиад были награждены одинаковыми подарками. Во всех подарках вместе было 123 диска и 82 книги. Найдите, сколько дисков было в каждом подарке.

**3.** Длина автобусного маршрута 16 км. В часы «пик» автобус переходит на режим экспресса, уменьшая число остановок. В результате продолжительность рейса сокращается на 4 мин, а средняя скорость движения увеличивается на 8 км/ч. Найдите скорость автобуса в режиме экспресса (в км/ч).

**4.** Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами $120^\circ$ и $60^\circ$. Известно, что центры окружностей лежат по разные стороны от хорды и радиус меньшей окружности равен $7$. Найдите расстояние между центрами окружностей.

**5.** График функции $y=(a-1)x+b$ симметричен графику функции $y=5x+6$ относительно оси ординат. Найдите значение выражения $a \cdot b$.

**6.** Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, если по 23 марки на лист, то, по крайней мере, один лист останется пустым. Если школьнику подарить ещё такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Найдите количество листов в альбоме.

***Время выполнения работы – 180 минут.***

***Пользоваться калькулятором не разрешается***

## РЕШЕНИЕ:

1. Посчитаем количество занятых мест в закрытых кабинках: $8\cdot 2+16\cdot 4+4\cdot 3=92$ места.

В открытых кабинках было занято $4\cdot 3=12$ мест.

Таким образом, из 144 мест занятыми оказались $92+12=104$ места.

Загруженность аттракциона в данный момент составляет $\frac{104\cdot 100\%}{144}\approx 72,2\%\approx 72\%$.

**Ответ:72**

2. Разложим числа 123 и 82 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 123 & 3 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 82 & 2 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array}$$

Тогда, $НОД\,(123;82)=41$. Т. е. был награжден подарками 41 призер олимпиады. Найдем, сколько дисков было в каждом подарке: $123:41=3$(диска).

**Ответ: 3**

3. Пусть скорость автобуса в режиме «экспресса» равна $x$ км/ч, тогда первоначальная скорость автобуса $(x-8)$ км/ч. На весь маршрут, т.е. на 16 км, автобус в режиме «экспресса» затратит $\frac{16}{x}$ ч, а не в часы «пик» на этот путь потребуется $\frac{16}{x-8}$ ч. 4 мин $=\frac{4}{60}$ ч $=\frac{1}{15}$ ч. По условию задачи составим уравнение:

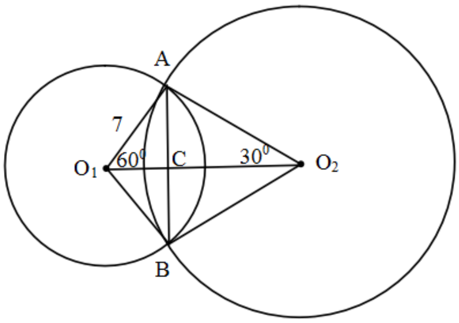
$$\frac{16}{x-8}-\frac{16}{x}=\frac{1}{15};\frac{16\cdot 15x-16\cdot 15(x-8)-x(x-8)}{15x(x-8)}=0;x^2-8x-1920=0;$$

$$\frac{D}{4}=4^2+1920=1936=44^2;x_1=4+44=48,x_2=4-44<0.$$

Итак, искомая скорость равна 48 км/ч.

**Ответ: 48**

4.




По условию $\angle AO_1B=120^0$, $\angle AO_2B=60^0$, отрезок $O_1O_2$, соединяющий центры окружностей, перпендикулярен общей хорде $AB$ и делит ее пополам.

По теореме косинусов из равнобедренного треугольника $AO_1B$ находим

$$AB^2 = O_1A^2 + O_1B^2 - 2 \cdot O_1A \cdot O_1B \cdot \cos 120^\circ,$$
$$AB^2 = 49 + 49 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 147.$$

Значит, $AB = 7\sqrt{3}, \ AC = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.

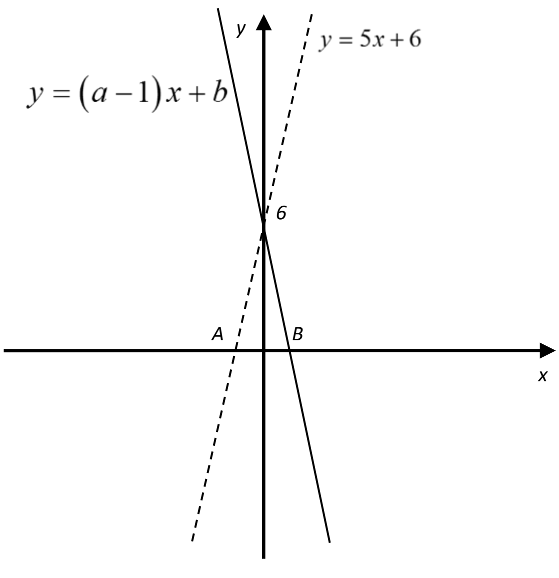
В прямоугольном треугольнике $O_1CA$ катет $O_1C = \dfrac{1}{2}O_1A = 3,5$ (как катет, лежащий против угла в $30^\circ$).

В прямоугольном треугольнике $O_2CA$ катет $O_2C = \sqrt{3} \cdot AC = \sqrt{3} \cdot \dfrac{7\sqrt{3}}{2} = \dfrac{21}{2}$.

Таким образом, $O_1O_2 = O_1C + O_2C = \dfrac{7}{2} + \dfrac{21}{2} = 14$.

**Ответ: 14**

5. Так как графики функций $y = (a-1)x + b$ и $y = 5x + 6$ симметричны относительно оси ординат, то они пересекают ось ординат в одной и той же точке. В этом случае $b = 6$ и функция $y = (a-1)x + b$ принимает вид $y = (a-1)x + 6$. Воспользуемся также симметрией относительно оси ординат нулей функций $y = (a-1)x + 6$ и $y = 5x + 6$ - точек *B* и *A*. Найдем абсциссу точки *A*: $5x + 6 = 0; \ x = -\dfrac{6}{5}$.




Т.е. точка *A* имеет координаты $\left(-\dfrac{6}{5}; 0\right)$.

Тогда точка *B* имеет координаты $\left(\dfrac{6}{5}; 0\right)$

Так как точка *B* принадлежит графику функции $y = (a-1)x + 6$, то должно выполняться равенство $0 = (a-1) \cdot \dfrac{6}{5} + 6$.

Найдем $a$:

$(a-1) \cdot \dfrac{6}{5} = -6; \ (a-1) \cdot \dfrac{1}{5} = -1; \quad a - 1 = -5; \quad a = -4$

Найдем значение выражения

$a \cdot b = -4 \cdot 6 = -24$

**Ответ: -24**

**7.** Пусть в альбоме $x$ листов. Тогда, если наклеить по 20 марок на каждый лист, будет наклеено $20x$ марок. Если школьнику подарить ещё один такой же альбом ($x$ листов), где на каждом листе наклеена 21 марка, то всего в этом альбоме будет $21x$ марок. Известно, что вместе с марками, которые есть у школьника, эти $21x$ марок составляют 500 марок.

Отсюда получим: $500-21x$ - это марки, которые есть у школьника. $20x$ марок меньше, чем все марки: $500-21x$, т.к. не хватит альбома, если наклеивать на лист по 20 марок. Если все марки школьника наклеивать по 23 марки на лист, то они займут $\frac{500-21x}{23}$ листов, и это количество листов меньше или равно, чем $x-1$ лист (по условию, по крайней мере, один лист останется пустым). Составим и решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 20x < 500-21x, \\ \frac{500-21x}{23} \le x-1; \end{cases} \begin{cases} 41x < 500, \\ 500-21x \le 23(x-1); \end{cases} \begin{cases} x < 12\frac{8}{41} \\ 23x+21x \ge 500+23; \end{cases} \begin{cases} x < 12\frac{8}{41}, \\ 44x \ge 523; \end{cases} \begin{cases} x < 12\frac{8}{41}, \\ x \ge 11,88. \end{cases}$$

Целым решением этой системы неравенств является единственное число – 12.

**Ответ: 12**

Председатель цикловой
комиссии «Математические и
естественнонаучные предметы»
Протокол №6
«_23_» __января__ 2025 г. ___________________ /С.Б. Махнач/